1 КИНЕМАТИКА

Тұтас орта қозғалмайтын санақ жүйесі x^i-ге қатысты қозғалыста болсын деп есептейік. Ортамен бірге деформацияланатын және қозғалатын ілеспелі санақ жүйесі (ξ^1, ξ^2, ξ^3)-ді осы ортамен байланыстырайық. Абсолют қатты дененің кинематикасында сол денемен байланысқан ілеспелі жүйе бірге орын ауыстырады және бұрылады. Ал деформацияланатын қатты денемен байланысқан ілеспелі жүйе, тек қана орын ауыстырып және бұрылып қана қоймайды, сонымен қатар сол денемен бірге өзі де деформацияланады. Яғни, ξ^i жүйесі жалпы жағдайда қисық сызықты болады. Абсолют қатты дене сияқты, тұтас ортаның қозғалысы толығымен ілеспелі координаталар жүйесінің қозғалысымен анықталады (деформациясы да ескеріледі).

$M(\xi^i)$ ортасының белгілі бір бөлшегін қарастырайық. Уақыт өтуіне байланысты ол өзінің орындарын санақ жүйесімен салыстырғанда өзгертеді, сондықтан бөлшектің координаталары x^i бұл жүйеде уақыттың функциясы болып табылады

$$x^i = x^i\left(\xi^j, t\right). \tag{1.1}$$

(1.1) - теңдеулерін тұтас ортаның M бөлшегінің қозғалыс теңдеулері деп атайды.

$x^i\left(\xi^j, t\right)$ функциясы өзінің туындысымен бірге үздіксіз және функциялық жағынан бір-біріне тәуелсіз деп ұйғарайық. Сондықтан t уақыттың кез келген мәнінде анықтауыш нольге тең емес

$$J = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\right| \neq 0. \tag{1.2}$$

Егер ξ^j координаталары белгілі бір аймақта өзгереді деп қабылдасақ, онда (1.1) -теңдеулері осы аймақтағы ортаның кез келген бөлшектерінің қозғалыс теңдеулері болады. Сол себепті (1.1) – теңдеулер тұтас орта қозғалысының теңдеулері деп те аталынады.

Тұтас орта қозғалысын зерттеудің екі түрлі әдісі бар.

Лагранж әдісі

Лагранж деп аталынатын көзқарас бойынша қозғалатын ортаның өзі, зерттелінетін объект болып табылады, дәлірек айтқанда, оның жеке

бөлшектері материалдық нүкте ретінде қарастырылып олардың траекториялары зерттелінеді. Яғни, әрбір бөлшектің траекторияларын тапсақ, онда тұтас ортаның қозғалысы толық анықталады. Тұтас орта қозғалысының тензорлық характеристикалары, ξ^k координаталарының және t уақыттың функциялары ретінде беріледі. ξ^k, t - **Лагранж айнымалары** деп аталады.

Орын ауыстыру векторы

Тұтас ортаның ξ^k нүктесіндегі бөлшектің t_0 және t_1 уақыт мезгіліне сәйкес келетін M_0 және M_1 орындары, $\vec{r}_0$ және $\vec{r}_1$ радиус-векторларымен анықталатын болсын. $\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}_0$ векторын **орын ауыстыру векторы** деп атайды. Осы анықтама бойынша орын ауыстыру векторының компоненттері қозғалыстағы бөлшектің координаталарымен төмендегідей формула арқылы байланысады

$$w^i = x^i - x_0^i \quad \text{немесе} \quad x^i = x_0^i + w^i\left(x^k, t\right). \tag{1.3}$$

Егер, ξ^k-ға сәйкес координаталар жүйесі бастапқы уақыт мезетіндегі санақ жүйесіне дәл келетіндей етіп таңдап алынса $x_0^i = \xi^i$, онда (1.3) - теңдеулерін былай жазуға болады

$$x^i = \xi^i + w^i\left(\xi^k, t\right). \tag{1.4}$$

Бұдан орын ауыстыру векторының компоненттері арқылы жазылған теңдеулер, жалпы тұтас ортаның қозғалыс теңдеулерін беретіндігі шығады.

Жылдамдық векторы

Бөлшектің dt уақытындағы шексіз аз орын ауыстыруын $d\vec{w} = d\vec{r}$ қарастырайық. Осы орын ауыстыру векторының уақытқа қатынасы жылдамдық векторын береді

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = v^i\ \vec{э}_i, \tag{1.5}$$

мұндағы $\vec{э}_i$- санақ жүйесінің базистік векторлары, v^i- осы базистегі жылдамдық векторының компоненттері.

$d\vec{r} = dx^i \vec{э}_i = dw^i \vec{э}_i$ болғандықтан, жылдамдық векторының компоненттері Лагранж айнымалылары бойынша төмендегідей формуламен өрнектеледі:

$$v^i(\xi^k, t) = \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial w^i}{\partial t}. \qquad (1.6)$$

Үдеу векторы

Тұтас орта нүктесінің үдеуі дегеніміз, жылдамдықтан уақыт бойынша алынған меншікті туынды

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = a^i \vec{э}_i. \qquad (1.7)$$

Тік бұрышты координаталар жүйесіндегі үдеу векторы компоненттерінің түрі

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2}. \qquad (1.8)$$

Эйлер әдісі

Эйлердің есімімен аталатын екінші көзқарас бойынша зерттелетін объект - тұтас ортаның өзі емес, жылжымалы ортамен толтырылған қозғалмайтын кеңістіктің әрбір нүктесінде болып жатқан құбылыстар. Қозғалыстың әртүрлі характеристикалары x^i нүктелерінің және ***t*** уақыт координаталарының функциясы ретінде қарастырылады. x^1, x^2, x^3, t айнымалылары **Эйлер айнымалылары** деп аталады.

Сонымен, Эйлердің көзқарасы бойынша, зерттеу объектісі ортаның қозғалысын сипаттайтын мысалы, жылдамдықтың өрісі, үдеудің өрісі, тығыздықтың өрісі және т.б. әртүрлі тензорлық өрістер болып табылады.

Орын ауыстыру векторының өрісі

Эйлер айнымалылары бойынша орын ауыстыру векторының компоненттері келесі формулалармен анықталады

$$\vec{w} = w^i \vec{э}_i, \qquad w^i(x^i, t) = x^i - x_0^i. \qquad (1.9)$$

Егер орын ауыстыру векторы әрбір нүктеде уақытқа тәуелсіз, яғни $w^i(x^i)$ болса, онда орын ауыстыру өрісі **стационар**, ал орын ауыстыру

векторы әрбір нүктеде уақытқа тәуелді, яғни $w^i(x^i,t)$ болса, **стационар емес** деп аталады.

Белгіленген уақыт мезгілінде, кеңістіктің бір нүктесінен екінші нүктесіне өткенде өріс векторының **өзгерісі векторлық градиентпен** сипатталады

$$\nabla\vec{w} = \nabla_i w_j \, \vec{э}_i \vec{э}_j . \qquad (1.10)$$

Егер осы вектордың градиенті барлық нүктелерде нольге тең болса өріс **біртекті,** ал нольден өзгеше болса **өріс бір текті емес** деп аталынады.

Жылдамдық векторының өрісі

Жылдамдық векторының өрісін $\vec{v} = \vec{v}(x^i,t)$ қарастырайық. Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдық компоненттерінің мәндерін (1.5) формуласынан аламыз, егер оған тұтас орта қозғалысы теңдеулерінің ауысу негізінде алынған Лагранж координаталарының өрнегін $\xi^k = \xi^k(x^i,t)$ формулалары бойынша қойсақ, онда

$$\vec{v} = v^i \, \vec{э}_i , \qquad v^i(x_i,t) = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{\xi_j = \xi_j(x^k,t)} . \qquad (1.11)$$

Егер өрістің әрбір нүктесінде жылдамдық векторы t уақытқа тәуелсіз $\vec{v} = \vec{v}(x^i)$ немесе $v^i = v^i(x_i)$ болса, онда жылдамдық өрісін стационар, ал ортаның қозғалысын **қалыптасқан** деп атайды. Жалпы жағдайда, егер жылдамдық әрі координатаға, әрі уақытқа тәуелді болса $\vec{v} = \vec{v}(x^i,t)$, онда жылдамдық өрісін стационар емес, ал ортаның қозғалысын **қалыптаспаған** дейді.

Үдеу векторының өрісі

Бөлшектің үдеуі жылдамдық векторынан уақыт бойынша алынған толық туындымен анықталады

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_3} =$$

$$= \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_1} + v_2 \cdot \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_2} + v_3 \cdot \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_3} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}. \qquad (1.12)$$

Келтірілген теңдеу векторлық теңдеу болып табылады. Бұл теңдеу компоненттері арқылы былай жазылады.

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \left(v^j \cdot \nabla_j\right) v^i, \qquad (1.13)$$

немесе

$$a_k = \frac{dv_k}{dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \left(v_j \cdot \nabla^j\right) v_k. \qquad (1.14)$$

Жылдамдықтан уақыт бойынша алынған дербес туынды $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ - локальдық үдеу делінеді және ол кеңістіктің қозғалмайтын әрбір нүктесіндегі жылдамдықтың өзгерісін сипаттайды. Үдеудің өрнегіндегі екінші мүше $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$ – конвективтік үдеу деп аталады, ол кеңістіктің бір нүктесінен көрші нүктесіне ауысқандағы жылдамдықтың өзгерісін сипаттайды.

Егер жылдамдық өрісі стационар болса, онда локальдық үдеу нольге тең. Жылдамдық өрісі біртекті болған жағдайда, конвективтік үдеу нольге айналады. Сонымен локальдық үдеу жылдамдық өрісінің стационар еместігін, ал конвективті үдеу –оның біртекті еместігін сипаттайды.

Лагранж және Эйлер әдістерінің өзара байланысы

Математикалық тұрғыдан қарағанда Лагранж және Эйлер әдістерінің бір-бірінен айырмашылығы, екі түрлі координаталар жүйесінде қарастырылады, бірақ олардың арасындағы байланысты табуға болады.

Тұтас ортаның қозғалысы **Лагранж айнымалылары** арқылы белгілі болсын. Олай болса орын ауыстырудың, жылдамдықтың, үдеудің, температураның мәндері, сонымен қатар қозғалыстың теңдеуі және т.б. Лагранж айнымалыларының функциясы ретінде анықталды дейміз

$$\vec{w} = \vec{w}(\xi^k, t), \quad \vec{v} = \vec{v}(\xi^k, t), \quad T = T(\xi^k, t), \quad x^i = x^i(\xi^k, t) \qquad (1.15)$$

және т.б.

Эйлер айнымалыларына өту үшін Якобиан $\left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\right|$ нольден өзгеше болса, онда қозғалыс теңдеуін ξ^k айнымалыларына қатысты шешуге болады.

Лагранж координаталарының мәндерін $\xi^k = \xi^k(x^i, t)$ (1.15)-формулаларға қою арқылы ауыстыру, жылдамдық, температура және т.б. шамалар Эйлер айнымалыларының функциясы ретінде табылады:

$$\vec{w} = \vec{w}(x^i, t), \qquad \vec{v} = \vec{v}(x^i, t), \quad T = T(x^i, t) \quad \text{және т.б.} \qquad (1.16)$$

“А” шамасын Лагранж айнымалылары бойынша дифференциалдаудан, осы шаманы Эйлер айнымалылары бойынша дифференциалдауға көшу үшін төмендегі тәуелділікті пайдаланамыз

$$\frac{\partial A}{\partial \xi^k} = \frac{\partial A}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}, \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + V^k \frac{\partial A}{\partial x^k}. \qquad (1.17)$$

Соңғы теңдеу уақыт бойынша толық және локальдық туындылардың арасындағы байланысты көрсетеді. Сонымен, Лагранж айнымалылары арқылы берілген қозғалыстан Эйлер айнымалылары түріндегі қозғалысқа өту, айқындалмаған функцияны шешуге келіп саяды.

Керісінше, ортаның қозғалысы Эйлер айнымалылары арқылы берілсе, яғни ортаның барлық характеристикалары, соның ішінде жылдамдық x^i, t айнымалыларының функциясы ретінде белгілі болса, онда жылдамдық векторының компоненттерін анықтайтын теңдеуді

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i\left(x^1, x^2, x^3, t\right), \qquad (i = 1,2,3) \qquad (1.18)$$

x^i функциясына қатысты сызықты үш дифференциалдық теңдеулер жүйесі ретінде қарастыруға болады. Осы теңдеулер жүйесін интегралдаса, x^i шамасы t және үш C_1, C_2, C_3 тұрақтыларының функциясы ретінде табылады

$$x^i = x^i\left(t, C_1, C_2, C_3\right). \qquad (1.19)$$

Тұрақты сандардың мәндері бастапқы шарттардан ($t = t_0$ болғанда $x = x_0$) анықталады. Олай болса, бұл тұрақтылар тұтас ортаның нүктесін жекелейтін параметрлер Лагранж айнымалылары болып табылады. Сонымен, осы дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу арқылы ортаның қозғалыс заңы табылады. Оның көмегімен барлық формулалардан $\vec{w}$, $\vec{v}$, T және т.б.

таралуларын анықтайтын Лагранж айнымалыларына көшуге болады. Яғни Эйлер айнымалыларынан Лагранж айнымалыларына өту дифференциалдық теңдеулерді интегралдаумен байланысты болады.

Гидромеханика саласында көбінесе Эйлер әдісін қолданады, себебі сұйықтың шекаралық қозғалысы мен формасы берілген деп есептелінеді. Гидромеханикада ізделінетін шамалар тұтас орта бөлшектерінің орын ауыстыруы емес, олардың жылдамдықтары, ал жылдамдықтарына байланысты шекаралық шарттары тұжырымдалады. Осының бәрі бөлшектердің әрқайсысының қозғалысын қадағаламай, сұйық толтырылған кеңістіктегі тек жылдамдықтардың таралуына назар аударуға мүмкіндік береді және әрбір уақыт мезетінде осы нүктеден өтіп жатқан бөлшектердің өздеріне тәуелсіз болады. Осындай жағдайларға Эйлер айнымалыларын пайдаланатын математикалық аппарат қолайлы.

Серпімділік теориясындағы түпкі мақсат – бастапқы формасы, бекіту шарты және жүктемесі берілген серпімді дене бөлшектерінің орын ауыстыруын анықтау. Сонымен қатар орын ауыстыруы айқын емес, денені шектеп тұрған беттің әрбір аудандарының түрін де анықтау керек. Басқаша айтқанда серпімділік теориясындағы шектік есептерді шешу үшін, шекарадағы шарттар беріледі, ал шекараның формасы жалпы айтқанда ізделініп отырған шамаларға тәуелді. Сондықтан бұл жағдайда Лагранж әдісі қолайлы. Себебі, дененің деформацияға дейінгі шекаралық теңдеуі, деформациядан кейінгі шекаралық теңдеуімен бірдей болады.

Скалярлық, векторлық өрістер және олардың негізгі қасиеттері

Тұтас орта қозғалысын зерттегенде $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ функциялары немесе $\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ функциялары болатын скалярлық және векторлық шамаларды ендіру қажет. Осы әрбір координаттар жүйесінен белгілі бір облысты бөліп алып және осы облыстың әрбір нүктесіне сәйкес сан мәнін қойып, мысалы, температураны T, жылдамдықты $\vec{v}$ немесе одан да күрделі характеристикаларды алуға болады. Қарастырылып отырған облыстың әрбір нүктесінде берілген шамалар мәндерінің жиынтығы сол шамалардың (скалярлық, векторлық) өрістері деп аталады.

Температура және жылдамдық өрістерінің мысалынан кейбір ортақ характеристикаларын зерттейік.

Егер температураның таралуы лагранж айнымалылары арқылы берілсе, онда тұтас орта бөлшектерінің бірлік уақыттағы t температурасының

өзгерісін $T\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t\right)$есептеу оңай. Ол температурадан уақыт бойынша алынған туындыға $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}$ тең.

Егер температураның таралуы эйлер айнымалылары арқылы берілсе, онда бұл туындыны есептегенде лагранж айнымалыларына көшіп

$$T\left(x^i,t\right)=T\left[x^i\left(\xi^k,t\right),t\right] \tag{1.20}$$

және күрделі функцияны дифференциалдау ережесін пайдалану қажет. Сонда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^k}=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i}+\frac{\partial T}{\partial x^1}\left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^k}+\frac{\partial T}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^k}+\frac{\partial T}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^k}, \tag{1.21}$$

$\frac{\partial x^i}{\partial t}$ туындысы ξ^k тұрақты болған жағдайда алынады және v^i жылдамдық компоненттері болып табылады. Сондықтан

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^k}=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i}+v^k\frac{\partial T}{\partial x_k} \tag{1.22}$$

немесе

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+v^k\frac{\partial T}{\partial x^k}. \tag{1.23}$$

$\frac{dT}{dt}$ туындысы тұтас ортаның берілген нүктесіндегі уақытқа байланысты температураның өзгерісін сипаттайды және уақыт бойынша температураның толық (индивидуальді) туындысы делінеді. $\frac{\partial T}{\partial t}$- туындысы кеңістіктің берілген нүктесіндегі бірлік уақыттағы температурасының өзгерісін сипаттайды және локальдық туынды делінеді. $v^i\frac{\partial T}{\partial x^i}$ туындысы кеңістіктің бір нүктесінен белгіленген уақыт мезетінде оған шексіз жақын нүктеге орын ауыстырғандағы температураның өзгерісін сипаттайды және конвективті туынды деп аталады. Егер процесс стационар болса, онда оларды

сипаттайтын уақыт бойынша барлық шамалардан алынған локальдық туынды нольге тең, яғни

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial v^i}{\partial t} = ... = 0 . \qquad (1.24)$$

Конвективті туынды $v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}$ қозғалыс болмаған жағдайда немесе температура градиенті жоқ кезде, яғни температураның скаляр өрісі біртекті болғанда нольге тең, яғни

$$v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} = 0 . \qquad (1.25)$$

Кез келген векторлық өріске мысалы, жылдамдық өрісін енгізуге болатын векторлық сызықтардың мағынасын зерттеуге көшейік. Практикада көбінесе ағын сызықтарын білу керек. Ағын сызығының қасиеті–жылдамдық векторы $\vec{v}$ ағын сызығының барлық нүктесіне жанама болып келеді. Осы анықтамадан ағын сызықтарының бойынан алынған элемент

$$d\vec{r} = dx^i \ \vec{э}_i = dx^1 \ \vec{э}_1 + dx^2 \ \vec{э}_2 + dx^3 \ \vec{э}_3$$

және жылдамдық векторы

$$\vec{v} = v^i \ \vec{э}_i = v^1 \ \vec{э}_1 + v^2 \ \vec{э}_2 + v^3 \ \vec{э}_3$$

бір-біріне параллель, яғни

$$d\vec{r} = d\lambda \cdot \vec{v} \qquad (1.26)$$

мұндағы $d\lambda$–скаляр параметр. Ал енді жылдамдықтың компоненттері арқылы жазсақ

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3} = d\lambda \qquad (1.27)$$

немесе

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = v^i\left(x^1, x^2, x^3, t\right), \quad i = 1,2,3. \qquad (1.28)$$

Бұл ағын сызығының дифференциалдық теңдеуі. Ол орта бөлшектерінің қозғалыс траекториясының дифференциалдық теңдеуінен өзгеше

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x^1, x^2, x^3, t). \qquad (1.29)$$

(1.28) интегралдағанда t –ны тұрақты параметр деп, ал (1.29) теңдеуінде t –ны айнымалы деп есептеу қажет.

Стационар қозғалыс кезінде ағын сызығы мен траектория бір -бірімен беттеседі.

“С” контурдың әрбір нүктесі арқылы ағын сызығын жүргізуге болады. Бұл жерде егер “С”-ның өзі ағын сызығы болмаса, онда ағын сызығының беті пайда болады. Егер “С” контуры тұйық болса, онда ағын түтікшесі пайда болады, яғни ағын түтікшесі делінеді. Кез келген векторлық өрісте осындай жолмен жасалынған түтікше векторлық түтікше деп аталынады.

Кез келген векторлық өріс сияқты, құйын жылдамдығының $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\ \vec{v}$ вектор өрісі үшін де құйын сызықтары мен түтікшелері түсінігін енгізуге болады. Құйын сызығы дегеніміз, оның кез келген нүктесіне жүргізілген құйын векторы $\vec{\omega}$ жанама болып келеді. Құйын сызығының дифференциалдық теңдеуі

$$\frac{dx^1}{\omega^1} = \frac{dx^2}{\omega^2} = \frac{dx^3}{\omega^3} = d\lambda. \qquad (1.30)$$

Құйын сызықтарына жоғарыда айтылған ағын сызықтарының барлық қасиеттері сәйкес келеді.

Есептер мен жаттығулар

Лагранж және Эйлер әдістері. Тұтас орта қозғалысының теңдеулері. Орын ауыстыру, жылдамдық және үдеу өрістері. Траектория, ағын сызықтары және құйын сызықтары.

1.1.Тұтас орта қозғалысының заңы Эйлер түрінде берілген

$$x_1 = \xi_1,$$

$$x_2 = k\xi_1^2 t^2 + \xi_2,$$

$$x_3 = \xi_3.$$

а) Берілген қозғалыс үшін Якобианның $J = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \right| \neq 0$ нөлден өзгеше екендігін дәлелдеңіз.

ә) Қозғалыс заңын Лагранж түрінде анықтаңыз $\xi_i = \xi_i(x_i, t)$

Шешуі

а) (1.2) теңдеуіне сәйкес якобиан:

$$J = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 2k\xi_1 t^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Якобиан нөлден өзгеше болғандықтан қозғалыс теңдеулерін түрлендіру арқылы келесі өрнектерді аламыз:

$$\xi_1 = x_1,$$

$$\xi_2 = x_2 - kx_1^2 t^2,$$

$$\xi_3 = x_3.$$

Бұдан бастапқы уақыт $t = 0$ мезетінде, $\xi_i = x_i$ екендігі шығады.

1.2. Тұтас орта қозғалысының заңы берілген

$$x_1 = \xi_1,$$

$$x_2 = \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} e^t + \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} e^{-t},$$

$$x_3 = \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} e^t - \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} e^{-t}.$$

Лагранж түріндегі жылдамдық және үдеу компоненттерін анықтаңыз.

Шешуі: Екінші және үшінші теңдеулерді бір-біріне қосу және бір-бірінен азайту арқылы келесі өрнектер шығады

$$\xi_2 + \xi_3 = e^{-t}\left(x_2 + x_3\right),$$

$$\xi_2 - \xi_3 = e^{t}\left(x_2 - x_3\right).$$

Осы өрнектерді бір-біріне қосу және бір-бірінен азайту арқылы сәйкесінше ξ_2 және ξ_3 анықталады. Сөйтіп келесі теңдеулер шығады:

$$\xi_1 = x_1$$

$$\xi_2 = e^{-t}\,\frac{x_1 + x_2}{2} + e^{t}\,\frac{x_2 - x_3}{2},$$

$$\xi_3 = e^{-t}\,\frac{x_2 + x_3}{2} - e^{t}\,\frac{x_2 - x_3}{2}.$$

Олай болса, орын ауыстыру векторының компоненттері $w_i = x_i - \xi_i$ лагранж түрінде былай жазылады:

$$w_1 = 0,$$

$$w_2 = e^t \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} + e^{-t} \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} - \xi_2 ,$$

$$w_3 = e^t \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} - e^{-t} \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} - \xi_3 ,$$

немесе Эйлер түрінде:

$$w_1 = 0 ,$$

$$w_2 = x_2 - e^{-t} \frac{x_2 + x_3}{2} - e^t \frac{x_2 - x_3}{2} ,$$

$$w_3 = x_3 - e^{-t} \frac{x_2 + x_3}{2} + e^t \frac{x_2 - x_3}{2} .$$

Жылдамдықты анықтайтын болсақ

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial w_i}{\partial t} ,$$

Лагранж айнымалыларындағы жылдамдық векторының компоненттері:

$$v_1 = 0 ,$$

$$v_2 = e^t \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} - e^{-t} \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} ,$$

$$v_3 = e^t \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} + e^{-t} \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} .$$

Бұл теңдеулерден есептің берілгені ескеріле отырып, Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдық векторының компоненттері анықталады:

$$v_1 = 0 ,$$

$$v_2 = x_3 ,$$

$$v_3 = x_2 .$$

1.3. Тұтас орта қозғалысының заңы берілген

$$x_1 = \xi_1 ,$$

$$x_2 = \xi_2 + A\xi_3 ,$$

$$x_3 = \xi_3 + A\xi_2 ,$$

мұндағы А – тұрақты. Лагранж және Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген орын ауыстыру векторының компоненттерін анықтаңыз.

1.4 Тұтас орта қозғалысының заңы Лагранж айнымалылары арқылы берілген

$$x_1 = \xi_1 e^t + \xi_3 \left(e^t - 1\right),$$

$$x_2 = \xi_1 \left(e^t - e^{-t}\right) + \xi_2 ,$$

$$x_3 = \xi_3 .$$

а) Якобианның нөлден өзгеше екендігін көрсетіңіз;

ә) Тұтас орта қозғалысының заңын Эйлер айнымалылары арқылы өрнектеңіз;

б) Эйлер айнымалылары түріндегі жылдамдық және үдеу өрістерін анықтаңыз.

1.5. Тұтас орта қозғалысының заңы Лагранж айнымалылары арқылы берілген

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2 \left(e^t - 1\right),$$

$$x_2 = \xi_1 \left(e^{-t} - 1\right) + \xi_2 ,$$

$$x_3 = \xi_3 .$$

а) Якобианның нөлден өзгеше екендігін көрсетіңіз
ә) Тұтас орта қозғалысының заңын Эйлер айнымалылары арқылы өрнектеңіз.
б) Эйлер айнымалылары түріндегі жылдамдық және үдеу өрістерін анықтаңыз

1.6. Тұтас орта қозғалысының теңдеуі Лагранж айнымалылары арқылы берілген

$$x_1 = \xi_1 e^{k_1 t},$$

$$x_2 = \xi_2 e^{k_2 t},$$

$$x_3 = \xi_3 e^{k_3 t}.$$

а) Якобианның нөлге айналмайтындығын көрсетіңіз;

ә) Тұтас орта қозғалысының заңын Эйлер айнымалылары арқылы өрнектеңіз.

б) Эйлер айнымалылары түріндегі жылдамдық және үдеу өрістерін анықтаңыз.

1.7. Орын ауыстыру векторы Лагранж координатасының функциясы ретінде төмендегідей арақатынастармен берілген

$$w_1 = \xi_1 \left(e^{k_1 t} - 1\right),$$

$$w_2 = \xi_2 \left(e^{k_2 t} - 1\right),$$

$$w_3 = \xi_3 \left(e^{k_3 t} - 1\right).$$

Эйлер айнымалылары түріндегі жылдамдық векторының компоненттерін анықтаңыз.

1.8. Лагранж айнымалылары түріндегі орын ауыстыру векторы

$$w_1 = -\xi_1 (1 - \cos kt) - \xi_2 \sin kt,$$

$$w_2 = \xi_1 \sin kt - \xi_2 (1 - \cos kt),$$

$$w_3 = 0.$$

Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдық және үдеу векторларының өрістерін анықтаңыз.

1.9. Тұтас орта қозғалысының заңы берілген

$$x_1 = \xi_1 \cos kt - \xi_2 \sin kt,$$

$$x_2 = \xi_1 \sin kt + \xi_2 \cos kt,$$

$$x_3 = \xi_3.$$

Эйлер айнымалылары түріндегі жылдамдық пен үдеу өрістерін анықтаңыз.

Шешуі:

Лагранж айнымалылары арқылы берілген жылдамдық векторының компоненттері келесі формула бойынша анықталады

$$v_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{\xi_k}, \text{ яғни}$$

$$v_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)_{\xi_k} = -k\xi_1 \sin kt - k\xi_2 \cos kt,$$

$$v_2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)_{\xi_k} = k\xi_1 \cos kt - k\xi_2 \sin kt,$$

$$v_3 = \left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)_{\xi_k} = 0.$$

Қозғалыс заңын ξ_1, ξ_2, ξ_3 айнымалыларына қатысты шеше отырып келесі шамалар алынады

$$\xi_1 = x_1 \cos kt + x_2 \sin kt,$$

$$\xi_2 = -x_1 sin kt + x_2 \, cos kt \, ,$$

$$\xi_3 = x_3 \, .$$

яғни Эйлер айнымалыларына көшеміз.

Эйлер айнымалыларындағы жылдамдық векторының компоненттері мына түрде болады

$$v_1 = -k \, x_2 \, ,$$

$$v_2 = k \, x_1 \, ,$$

$$v_3 = 0 \, .$$

Келесі формула арқылы $a_i = \dfrac{dv_i}{dt} = \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$ Эйлер айнымалыларындағы үдеу векторының компоненттері анықталады, яғни

$$a_1 = -k^2 x_1 \, ,$$

$$a_2 = -k^2 x_2 \, ,$$

$$a_3 = 0 \, .$$

1.10. Берілген жылдамдық өрісі үшін Эйлер және Лагранж айнымалылары арқылы өрнектелген үдеу компоненттерін анықта.

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t} \, ,$$

$$v_2 = \frac{2x_2}{1+t} \, ,$$

$$v_3 = \frac{3x_3}{1+t} \, .$$

1.11. Тұтас ортаның Лагранж айнымалыларындағы қозғалыс заңы

$$x_1 = \xi_1 \cos kt,$$

$$x_2 = \frac{\xi_2}{1 + \sin kt},$$

$$x_3 = \xi_3.$$

а) Якобианның нөлге айналмайтындығын көрсетіңіз

ә) Тұтас орта қозғалысының заңын Эйлер айнымалылары арқылы өрнектеңіз.

б) Эйлер айнымалылары түріндегі жылдамдық және үдеу векторларының компоненттерін анықтаңыз

1.12. Лагранж айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдық өрісі

$$v_1 = -\xi_2 e^{-t},$$

$$v_2 = -\xi_3,$$

$$v_3 = 2t.$$

Эйлер айнымалылары түріндегі үдеудің компоненттерін тап.

а) Тұтас орта қозғалысының заңын анықтаңыз;

ә) Эйлер айнымалыларындағы үдеу векторларының компоненттерін анықтаңыз.

1.13. Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдық өрісі

$$v_1 = a_1(t)x_1,$$

$$v_2 = a_2(t)x_2,$$

$$v_3 = a_3(t)x_3.$$

Қозғалыс заңы мен орын ауыстыру векторын Лагранж координатасының функциясы ретінде тап.

1.14. Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдық өрісі

$$v_1 = a_1(t)x_1,$$

$$v_2 = 0,$$

$$v_3 = 0.$$

Лагранж айнымалылары түріндегі қозғалыс заңы мен орын ауыстыру векторының компоненттерін табыңыз.

1.15. Тұтас ортаның қозғалыс заңы Лагранж айнымалыларында берілген

$$x_1 = \xi_1\left[\frac{2qt}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + 1\right]^{1/2},$$

$$x_2 = \xi_2\left[\frac{2qt}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + 1\right]^{1/2},$$

$$x_3 = \xi_3,$$

мұндағы q – тұрақты. Лагранж және Эйлер айнымалыларындағы жылдамдық векторының компоненттерін, траекторияны және ағын сызықтарын анықтаңыз.

Шешуі: Қозғалыс теңдеуіндегі t уақыттан арыла отырып траектория теңдеуін табамыз:

$$x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1}x_1, \quad x_3 = \xi_3.$$

Сонымен, бұл теңдеуден, координаталары $(\xi_1,\ \xi_2,\ 0)$ болатын бөлшектің траекториясы координаталар басынан өтетін түзу сызық екендігі шығады.

Лагранж айнымалыларындағы жылдамдық векторының компоненттері мына түрде анықталады:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\xi_1 q}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\left[\frac{2qt}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + 1\right]^{-1/2},$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{\xi_2 q}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\left[\frac{2qt}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + 1\right]^{-1/2},$$

$$v_3 = 0.$$

Ортаның қозғалыс заңдылығынан

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\xi_1^2 + \xi_2\right)^2\left[\frac{2qt}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + 1\right],$$

екендігі шығады. Сонымен қатар

$$\xi_1 = x_1\left[\frac{2qt}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + 1}\right]^{-1/2},$$

$$\xi_2 = x_2\left[\frac{2qt}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + 1}\right]^{-1/2},$$

$$\xi_3 = x_3.$$

Бұдан, Эйлер айнымалыларындағы жылдамдық векторының компоненттері табылады.

$$v_1 = \frac{qx_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$v_2 = \frac{qx_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$v_3 = 0.$$

Осы жағдайдағы ағын сызығының теңдеуі

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}, \quad x_3 = \xi_3 .$$

Бұдан ағын сызықтарының (0, 0, ξ_3) нүктесі арқылы өтетін түзу сызықтар екендігі көрінеді

$$x_2 = cx_1, \quad x_3 = \xi_3,$$

мұндағы С-тұрақты.

1.16. Жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = x_1^3,$$

$$v_2 = x_2^2,$$

$$v_3 = x_3.$$

а) Үдеу векторының сәйкес компоненттерін анықтаңыз;
ә) А (1,2,1) нүктесі арқылы өтетін ағын сызығының теңдеуін табыңыз.

1.17. Тұтас ортаның қозғалысы Эйлер әдісі арқылы төмендегідей түрде берілген

$$v_1 = x_1 + t,$$

$$v_2 = -x_2 + t,$$

$$v_3 = 0.$$

а) $t = 0$ уақыт мезетінде А (-1,-1,0) нүктесі арқылы өтетін ағын сызығын анықта;
ә) $t = 0$ уақыт мезетінде А (-1,-1,0) нүктесінде болған бөлшектің траекториясын тап.

1.18. Тұтас ортаның қозғалысы Эйлер әдісі арқылы төмендегідей түрде берілген

$$v_1 = ax_1,$$

$$v_2 = -bx_2,$$

$$v_3 = 0 \quad (\mathrm{a,b,>0}).$$

а) $A\left(x_1^0, x_2^0\right)$ нүктесі арқылы өтетін ағын сызығының теңдеуін табыңыз;
ә) Лагранж айнымалылары түріндегі жылдамдық пен үдеу векторларының компоненттерін анықтаңыз.

1.19. Жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^3,$$

$$v_2 = -x_1^3 - x_1 x_2^2,$$

$$v_3 = 0$$

а) Берілген жылдамдық өрістері үшін ағын сызығының шеңбер болатындығын дәлелдеңіз;
ә) A(1,1,0); B(1,2,0); C(1,3,0) нүктелерінен өтетін ағын сызықтарының теңдеулерін анықтаңыз, графиктерін тұрғызыңыз.

1.20. Жылдамдық өрісі берілген.

$$v_1 = \frac{x_1}{x_1 - t},$$

$$v_2 = \frac{x_2}{x_2 + t},$$

$$v_3 = 0.$$

$t=1$ уақыт мезетінде $A(3,1,0)$ нүктесінде болатын бөлшек траекториясының теңдеуін анықтаңыз.

1.21. Эйлер айнымалылары түріндегі жылдамдық өрісі

$$v_1 = \frac{bc}{a}(x_2 - x_3),$$

$$v_2 = \frac{ca}{b}(x_3 - x_1),$$

$$v_3 = \frac{ab}{c}(x_1 - x_2),$$

мұндағы a, b және c – тұрақты сандар. Бөлшек қозғалысының траекториялары жазық екендігін дәлелдеңіз.

1.22. Эйлер айнымалылары түріндегі жылдамдық өрісі

$$v_1 = cx_2 - bx_3,$$

$$v_2 = ax_3 - cx_1,$$

$$v_3 = bx_1 - ax_2,$$

мұндағы a, b және c – тұрақты сандар. Ортаның бөлшектері шеңбер бойымен қозғалатындығын көрсетіңіз..

1.23. Жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = 4x_1x_2,$$

$$v_2 = 2x_1^2,$$

$$v_3 = 0.$$

А (1,1,0) нүктесі арқылы өтетін ағын сызығының теңдеуін анықтаңыз.

1.24. Жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = \frac{x_1}{b+t},$$

$$v_2 = \frac{2x_2}{b+t},$$

$$v_3 = \frac{3x_3}{b+t}.$$

а) Үдеу өрісін анықтаңыз;
ә) ағын сызығы мен траектория теңдеулерін табыңыз;
б) орта бөлшектерінің қозғалыс заңын анықтаңыз.

1.25. Жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = e^{x_1},$$

$$v_2 = x_1 x_2,$$

$$v_3 = 0.$$

Берілген орта қозғалысы үшін ағын сызығының теңдеуін анықтаңыз.

1.26. Жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = 4x_3 - 3x_2,$$

$$v_2 = 3x_1,$$

$$v_3 = -4x_1.$$

А (1, 0,0) нүктесіндегі үдеудің компоненттерін анықтаңыз.

1.27. Тұтас орта қозғалысының заңы мына түрде берілген

$$x_1 = a + \frac{e^{-b\lambda}}{\lambda} sin\lambda(a + kt),$$

$$x_2 = -b - \frac{e^{-b\lambda}}{\lambda} cos\lambda(a + kt),$$

$$x_3 = \xi_3,$$

мұндағы a, b және k – тұрақты сандар.

Жылдамдық шамасының тұрақты, траекторияның шеңбер екендігін көрсетіңіз.

1.28. Винттің бойымен қозғалатын орта бөлшегінің қозғалыс теңдеуі берілген

$$x_1 = R cos kt,$$

$$x_2 = R sin kt,$$

$$x_3 = h kt / 2\pi.$$

Бөлшектің жылдамдығы мен үдеуін анықтаңыз.

1.29. Ортаның бір өлшемді стационар емес қозғалысының жылдамдығы төмендегідей арақатынастармен берілген

а) $v = k\sqrt{1 - bx} / \sqrt{c^2 + t^2},$

ә) $v = k\, exp(-bx) sin\omega t.$

Ортаның қозғалыс заңын және үдеуін анықтаңыз.

1.30. Жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = ax_1 \, sin kt,$$

$$v_2 = -ax_2 \, sin kt,$$

$$v_3 = 0.$$

а) Үдеу өрісін анықтаңыз;
ә) ағын сызығы мен траектория теңдеулерін табыңыз;
б) орта бөлшектерінің қозғалыс заңын анықтаңыз.

1.31. Тұтас орта жылдамдығының өрісі берілген

$$v_1 = -x_2 f(r),$$

$$v_2 = x_1 f(r),$$

$$v_3 = g(r),$$

мұндағы $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, $f(r)$ және $g(r)$ – белгілі бір берілген функциялар.
а) Үдеу өрісін анықтаңыз;
ә) ағын сызықтары мен траекторияны табыңыз;

1.32. Жылдамдық өрісі төмендегідей формулалармен берілген.

$$v_1 = -x_2 f(r),$$

$$v_2 = x_1 f(r),$$

$$v_3 = g(r) + v_0 \sin kt,$$

мұндағы $f(r)$ және $g(r)$– кейбір берілген функциялар, v_0–берілген жылдамдық, k–берілген жиілік. $t = 0$ уақыт мезетіндегі A(1,0,0) нүктесі арқылы өтетін ағын сызығы мен траекторияны табыңыз.

1.33. Жылдамдық өрісі төмендегідей формуламен берілген

$$v_1 = x_1 - 3x_2,$$

$$v_2 = -2x_2,$$

$$v_3 = x_3 - \frac{1}{x_3}.$$

Ағын сызығы мен қозғалыс заңын табыңыз.

1.34. Егер жылдамдық өрісі төмендегідей түрде берілсе

$$v_1 = x_1 x_2,$$

$$v_2 = x_2 x_3,$$

$$v_3 = x_1 x_3$$

а) ортаның стационар қозғалысы құйынды немесе құйынсыз болатындығын анықтаңыз; құйынды болған жағдайда
ә) құйын векторының компоненттерін табыңыз;
б) құйын сызығының дифференциалдық теңдеуін құрыңыз.

1.35. Жылдамдық өрісі берілген:

$$v_1 = \frac{a\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{r^4},$$

$$v_2 = \frac{2a\, x_1 x_2}{r^4},$$

$$v_3 = 0, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Ортаның ағыны құйынды немесе құйынсыз екендігін анықтаңыз.

1.36. Егер жылдамдық өрісі төмендегідей түрде берілсе

$$v_1 = x_2 + x_3,$$

$$v_2 = x_3 + x_1,$$

$$v_3 = x_1 + x_2$$

орта қозғалысы құйынды бола ма?

1.37. Берілген жылдамдық өрісі үшін,

$$v_1 = x_2 + 3x_3,$$

$$v_2 = x_3 + 2x_1,$$

$$v_3 = x_1 + x_2$$

а) ортаның стационар қозғалысы құйынды немесе құйынсыз болатындығын анықтаңыз;
құйынды болған жағдайда
ә) құйын векторының компоненттерін табыңыз;
б) құйын сызығының дифференциалдық теңдеуін құрыңыз.

1.38. Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдық өрісі

$$v_1 = -kx_2,$$

$$v_2 = kx_1,$$

$$v_3 = 0 \quad (k \text{ - тұрақты}).$$

а) ортаның стационар қозғалысы құйынды немесе құйынсыз болатындығын анықтаңыз;
құйынды болған жағдайда:
ә) құйын векторының компоненттерін табыңыз;
б) құйын сызығының дифференциалдық теңдеуін құрыңыз.

1.39. Ортаның айналмалы қозғалысының өрісі үшін

$$\vec{v} = (ax_3 + bx_2)\vec{i} + (bx_1 - cx_3)\vec{j} + (cx_2 - ax_1)\vec{k}$$

а) ортаның стационар қозғалысы құйынды немесе құйынсыз болатындығын анықтаңыз;
құйынды болған жағдайда:
ә) құйын векторының компоненттерін табыңыз;

б) құйын сызығының дифференциалдық теңдеуін құрыңыз.
в) құйын сызықтарының түзу екендігін дәлелдеңіз.

1.40. Ортаның құйынды қозғалысының жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = \frac{cx_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$v_2 = \frac{cx_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$v_3 = 0,$$

мұндағы c - тұрақты.
а) құйын векторының компоненттерін табыңыз;
ә) құйын сызығының дифференциалдық теңдеуін құрыңыз;
б) құйын сызықтарын сызып көрсетіңіз.